

Laboratorium 1

1. Generowanie liczb losowych

a) Rozkład jednostajny

Wygenerujmy $n=100$ liczb z rozkładu $U[0,1]$

```
n<-100
```

```
U <- runif(n)
```

Obliczmy średnią, wariancję, odchylenie standardowe, i kwartyle

```
mean(U)
```

```
var(U)
```

```
sd(U)
```

```
quantile(U,0.25)
```

```
quantile(U,0.5)
```

```
quantile(U,0.75)
```

Rysujemy dystrybuantę empiryczną i prawdziwą na jednym rysunku

```
x<-seq(0,1,by=0.01)
```

```
y<-x
```

```
plot(ecdf(U))
```

```
lines(x,u,col=blue)
```

Rysujemy unormowany histogram (estymator gęstości) i prawdziwą gęstość na jednym rysunku

```
x<-seq(0,1,by=0.01)
```

```
y<-0*x+1
```

```
hist(U,prob=TRUE)
```

```
lines(x, y, col="blue", lwd=2)
```

b) Inne rozkłady – metoda odwracania dystrybuanty

Jeśli U ma rozkład jednostajny to $F^{-1}(U)$ ma rozkład o dystrybuancie F

Generujemy $n=100$ obserwacji z rozkładu $Beta(2,5)$

```
X<-runif(n)
```

```
Y<- qbeta(X,2,5)
```

Porównajmy dystrybuantę empiryczną z prawdziwą

```
x<-seq(0,1,by=0.01)
```

```
y<-pbeta(x,2,5)
```

```
plot(ecdf(Y))
```

```
lines(x, y, col="blue", lwd=2)
```

Porównajmy unormowany histogram z prawdziwą gęstością

```
x<-seq(0,1,by=0.01)
```

```
y<-dbeta(x,2,5)
```

```
hist(Y,prob=TRUE)
```

```
lines(x, y, col="blue", lwd=2)
```

c) Inne rozkłady – metoda eliminacji

Jeśli gęstość f jest ograniczona przez M oraz jej nośnik jest ograniczony i zawarty w przedziale $[a, b]$, to

$U|V < f(U)$ ma rozkład o gęstości f , gdzie U, V są niezależne o rozkładach jednostajnych na $[a, b]$ oraz $[0, M]$ odpowiednio.

```
n <- 100
```

```
i<-0
```

```
a<-0
```

```
b<-1
```

```
M<-5
```

```
X<-c()
```

```
while(i<n)
```

```
{
```

```
U<- runif(1)*(b-a)+a
```

```
V<-runif(1)*M
```

```
if(V<dbeta(U,2,5))
```

```
{
```

```
X[i]=U
```

```
i=i+1
```

```
}
```

```
}
```

```
x<-seq(0,1,by=0.01)
```

```
y<-dbeta(x,2,5)
```

```
hist(X,prob=TRUE)
```

```
lines(x, y, col="blue", lwd=2)
```

2. Empiryczna moc i empiryczny poziom istotności testu

Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(d, 1)$ testujemy $H_0: d \leq 0$ przeciwko alternatywie $H_1: d > 0$ testem jednostajnie najmocniejszym (patrz wykład, przykład 1 c). Obliczymy empiryczną moc testu dla różnych wartości n i d oraz porównamy ją z teoretyczną (prawdziwą) mocą testu.

```
m <- 10000
n <- 10
alpha <- 0.05
d <- 0
T <- c()
P <- c()
M <- c()
for (i in 1:m)
{
  X <- rnorm(n)+d
  T[i] <- sqrt(n)*mean(X)
  P[i] <- 1-pnorm(T[i],0,1)
  M[i] <- 0
  if(P[i] < alpha) {M[i] <- 1}
}
mean(M)
Moc <- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(n)*d,0,1)
Moc
hist(P,prob=TRUE)
```

Powtórzmy powyższą procedurę dla $d = -0.5, -0.1, 0, 1, 0.5$ i zobaczymy jak zmienia się rozkład p-warotości.

Teraz sporządzimy wykres mocy teoretycznej oraz empirycznej dla $n=10$ w zależności od $d \in [-1, 2]$

```
m <- 10000
k <- 300
n <- 10
alpha <- 0.05
d <- c()
T <- c()
P <- c()
M <- c()
Moc <- c()
for (j in 1:k)
{
```

```

d[j] <- j*0.01-1

for (i in 1:m)

{

  X <- rnorm(n)+d[j]

  T[i] <- sqrt(n)*mean(X)

  P[i] <- 1-pnorm(T[i],0,1)

  M[i]<-0

  if(P[i]< alpha) {M[i] <- 1}

}

Moc[j]=mean(M)

}

plot(d, Moc)

y<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(n)*d,0,1)

lines(d, y, col="blue", lwd=2)

```

Teraz sporządźmy kilka wykresów mocy w zależności od d dla n=10, 50, 100, 200

```

alpha<-0.05

d<-seq(-1,2,by=0.01)

moc<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(10)*d,0,1)

y2<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(50)*d,0,1)

y3<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(100)*d,0,1)

y4<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(200)*d,0,1)

plot(d, moc,type="l",lwd=2)

lines(d, y2, col="blue", lwd=2)

lines(d, y3, col="green", lwd=2)

lines(d, y4, col="red", lwd=2)

```

Teraz sporządźmy kilka wykresów mocy w zależności od n dla d=0.1, 0.15, 0.2, 0.25

```

alpha<-0.05

n<-seq(1,400,by=1)

moc<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(n)*0.1,0,1)

y2<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(n)*0.15,0,1)

y3<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(n)*0.2,0,1)

y4<- 1-pnorm(qnorm(1-alpha,0,1)-sqrt(n)*0.25,0,1)

plot(n, moc,type="l",lwd=2)

lines(n, y2, col="blue", lwd=2)

lines(n, y3, col="green", lwd=2)

lines(n, y4, col="red", lwd=2)

```

Zadanie do samodzielnego wykonania:

Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(d, 1)$ testujemy $H_0: d = 0$ przeciwko alternatywie $H_1: d \neq 0$ testem jednostajnie najmocniejszym wśród testów nieobciążonych (patrz wykład, przykład 1b). Powtórzyć powyższe ćwiczenie w tym wariancie.